物 理 学 报 *Acta Phys. Sin.* **Vol. 72, No. 2 (2023) 024701**

《楔形体上复合液滴润湿铺展行为的格子 Boltzmann 方法研究》附加材料*

张晓林 1) 黄军杰 1)2)†

1)（重庆大学航空航天学院，重庆 400044）

2)（重庆大学，非均质材料力学重庆市重点实验室，重庆 400044）

补充材料 A

当液滴在固壁上润湿铺展达平衡形态时，系统的总能量处于最小值，液滴界面呈球面形状。初始时刻的液滴是半径为r_0的 Janus 状液滴，对称参数下该液滴在楔形体上的平衡构型如图 S1 所示。楔形体顶角为χ，接触角$\theta_{13}=\theta_{23}$，O为左侧液滴界面的圆心。由$\sigma_{12}:\sigma_{13}:\sigma_{23}=1:1:1$，有$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\dfrac{2\pi}{3}$，根据几何条件有$\angle ABO=\dfrac{\pi}{6}$，同时要使液滴能够润湿楔形体，接触角应满足$\theta_{13}\le\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\chi}{2}$，要使液滴不发生分裂，接触角应满足$\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\chi}{2}\le\theta_{13}$。设$\angle ABC=\alpha$，$\angle ACB=\beta$，$\angle OBC=\angle OCB=\varepsilon$，$\angle COB=\gamma$，$\overline{AB}=h$，$\overline{CO}=\overline{BO}=r$，fluid1液滴面积为$S_V$，圆弧$BC$对应的扇形面积为$S$、三角形$ABC$的面积为$S_{ABC}$、三角形$COB$的面积为$S_{COB}$。

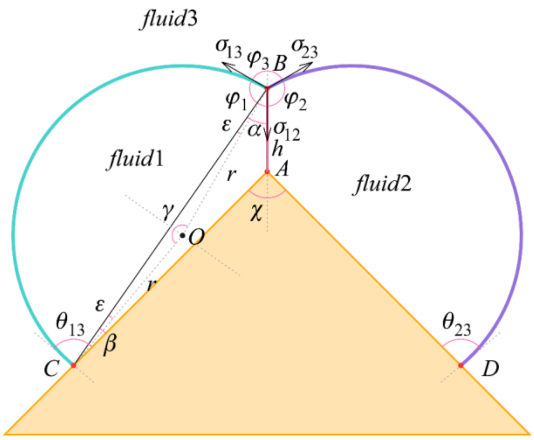

图 S1 楔形体上复合液滴的平衡构型

Fig. S1. Equilibrium configurations of compound droplets on wedges.

根据下列公式

$$\varepsilon+\frac{\pi}{6}=\alpha，\quad \alpha+\beta=\frac{\chi}{2}，\quad \beta-\varepsilon=\theta_{13}-\frac{\pi}{2}，$$

可以得到

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\chi}{2}-\theta_{13}\right)，\quad \beta=\frac{1}{2}\left[\theta_{13}-\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\chi}{2}\right)\right]，$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\chi}{2}-\theta_{13}\right)，\quad \gamma=\pi-2\varepsilon=\theta_{13}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\chi}{2}。$$

再由下列 6 个方程：

$$S_V=\frac{\pi r_0^2}{2}，\quad S=\frac{r^2}{2}\gamma，\quad S_{COB}=\frac{1}{2}\cdot 2r\cos\varepsilon\cdot r\sin\varepsilon=r^2\cos\varepsilon\sin\varepsilon，$$

$$\frac{h}{\sin\beta}=\frac{2r\cos\varepsilon}{\sin\left(\pi-\frac{\chi}{2}\right)}，\quad S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2r\cos\varepsilon\cdot h\sin\alpha，\quad S_V=S-S_{COB}+S_{ABC}，$$

可解出平衡态液滴半径：

$$r=\sqrt{\frac{\pi r_0^2}{2}\Big/\left(\frac{\gamma}{2}-\cos\varepsilon\sin\varepsilon+\frac{2\cos^2\varepsilon\sin\beta\sin\alpha}{\sin\frac{\chi}{2}}\right)}，$$

则 $h=\dfrac{2r\cos\varepsilon\sin\beta}{\sin\frac{\chi}{2}}$。

补充材料 B

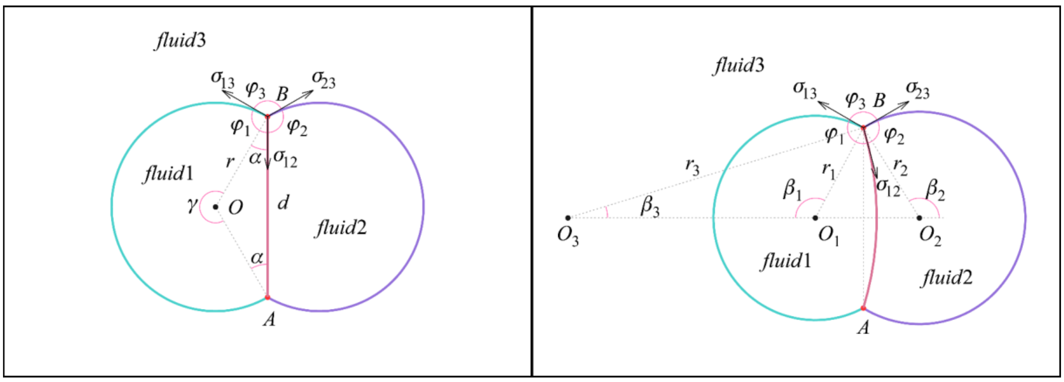

图 S2 复合液滴的平衡构型

Fig. S2. Equilibrium configuration of compound droplet.

无楔形体时复合液滴的平衡构型如图 S2 所示，其中左图为 3 个界面张力相同的情形，右图为 3 个界面张力不同的情形，它们均由初始半径为 r_0 的非平衡态 Janus 状液滴演化而来。

1）$\sigma_{13}:\sigma_{23}:\sigma_{12}=1:1:1$ 时，$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=2\pi/3$。根据几何条件可知：$\alpha=\angle OAB=\angle OBA=\dfrac{\pi}{6}$，设 $\gamma=\pi+2\alpha$，$\overline{OA}=\overline{OB}=r$，fluid1 液滴面积为 S_V，圆弧 AB 对应的扇形面积为 S，三角形 AOB 面积为 S_{AOB}。由下列 4 个方程：

$$S_V=\frac{\pi r_0^2}{2}，\quad S=\frac{r^2}{2}\gamma，$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 2r\cos\alpha\cdot r\sin\alpha=r^2\cos\alpha\sin\alpha，\quad S_V=S+S_{AOB}，$$

可解得平衡态液滴半径：

$$r=\sqrt{\frac{\pi r_0^2}{2}\Big/\left(\frac{\gamma}{2}+\cos\alpha\sin\alpha\right)}。$$

2）$\sigma_{13}:\sigma_{23}:\sigma_{12}\neq 1:1:1$ 为非对称界面张力情形，$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=2\pi$。$O_1$，$O_2$，$O_3$ 分别为左、右、中 3 个圆弧界面的圆心，相应的半径为 r_1，r_2，r_3，而 β_1，β_2，β_3 为与计算相关的 3 个假设角。根据几何关系有：

$$\varphi_1=\beta_1+\beta_3，\quad \varphi_2=\beta_2-\beta_3，\quad r_1\sin\beta_1=r_2\sin\beta_2，\quad r_1\sin\beta_1=r_3\sin\beta_3，$$

$$\frac{\pi r_0^2}{2}=r_1^2[\beta_1-\frac{1}{2}\sin(2\beta_1)]+r_3^2[\beta_3-\frac{1}{2}\sin(2\beta_3)]，$$

$$\frac{\pi r_0^2}{2}=r_2^2[\beta_2-\frac{1}{2}\sin(2\beta_2)]-r_3^2[\beta_3-\frac{1}{2}\sin(2\beta_3)]。$$

运用牛顿迭代法[1]求解上述 6 个方程，可得到 r_1，r_2，r_3，β_1，β_2，β_3。

参考文献

[1] Huang J J 2021 *Phys. Fluids* **33** 072105

