《二元混合物在液体层上发生马兰戈尼爆裂的研究》的补充材料

谢科薇[#] 陶金成[#] 董裕力[†] 翁雨燕[‡] 杨俊义 方亮

（苏州大学物理与科学技术学院，苏州 215031）

补充材料A

首先，因为在界面上没有质量转移，所以速度的法向分量在界面上是连续的：

$$u^{(n)}(r,z,t)|_{r=\xi^{(n)}} = u^{(n+1)}(r,z,t)|_{r=\xi^{(n)}}. \tag{A1}$$

其次，由无滑移条件可知，速度的切向分量也是连续的：

$$w^{(n)}(r,z,t)|_{r=\xi^{(n)}} = w^{(n+1)}(r,z,t)|_{r=\xi^{(n)}}. \tag{A2}$$

再次，流体的切向应力在界面是连续的，第n种流体在柱坐标下的轴对称流动的应力张量[21]可以表示为

$$\tau^{(n)} = \begin{bmatrix} -p^{(n)} + 2\mu^{(n)}\dfrac{\partial u^{(n)}}{\partial r} & \mu^{(n)}\left(\dfrac{\partial u^{(n)}}{\partial z} + \dfrac{\partial w^{(n)}}{\partial r}\right) \\ \mu^{(n)}\left(\dfrac{\partial u^{(n)}}{\partial z} + \dfrac{\partial w^{(n)}}{\partial r}\right) & -p^{(n)} + 2\mu^{(n)}\dfrac{\partial w^{(n)}}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{A3}$$

则界面切向应力连续可表示为

$$\mu^{(n)}\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(n)}}{\partial r}\right)\Big|_{r=\xi^{(n)}} = \mu^{(n+1)}\left(\frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(n+1)}}{\partial r}\right)\Big|_{r=\xi^{(n)}}. \tag{A4}$$

最后，跨界面的法向应力差必须由单位面积的表面张力来平衡，令$\boldsymbol{n}^{(n)}$是界面的单位法向量，指向向有拉普拉斯方程界面上的法相应力平衡方程为

$$\boldsymbol{n}^{(n)}\cdot\left(\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}\right)\big|_{r=\xi^{(n)}}\cdot\boldsymbol{n}^{(n)} = \gamma^{(n)}\kappa^{n}, \tag{A5}$$

其中，κ^n是截面的平均曲率，曲率可以直接由$\kappa^n = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{n}^{(n)}$得到。

补充材料B

$$\varphi(kr) = \frac{N(kr)}{D(kr)}, \tag{B1}$$

$N(kr)$和$D(kr)$分别可表示为

$$N(kr) = \mathrm{I}_1(kr)\Delta_1 - \{kr\mathrm{I}_0(kr) - \mathrm{I}_1(kr)\}\Delta_2, \tag{B2}$$

$$
\begin{aligned}
D(kr) = {} & \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)\{kr\mathrm{I}_0(kr) - \mathrm{I}_1(kr)\}\Delta_1 - \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)\{(k^2r^2+1)\mathrm{I}_1(kr) \\
& - kr\mathrm{I}_0(kr)\}\Delta_2 - \{krK_0(kr) - K_1(kr)\}\Delta_3 \\
& - \{(k^2r^2+1)K_1(kr) - krK_0(kr)\}\Delta_4 ,
\end{aligned} \tag{B3}
$$

其中，$\frac{\mu}{\mu'}$为液体 A 与液体 B 的黏度比， Δ_1，Δ_2，Δ_3和Δ_4可表示为

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} kr\mathrm{I}_0(kr) - \mathrm{I}_1(kr) & \mathrm{K}_1(kr) & -kr\mathrm{K}_0(kr) - \mathrm{K}_1(kr) \\ \mathrm{I}_0(kr) + kr\mathrm{I}_1(kr) & -\mathrm{K}_0(kr) & -\mathrm{K}_0(kr) + kr\mathrm{K}_1(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) kr\mathrm{I}_0(kr) & \mathrm{K}_1(kr) & -kr\mathrm{K}_0(kr) \end{vmatrix}, \tag{B4}
$$

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_1(kr) & \mathrm{K}_1(kr) & -kr\mathrm{K}_0(kr) - \mathrm{K}_1(kr) \\ \mathrm{I}_0(kr) & -\mathrm{K}_0(kr) & -\mathrm{K}_0(kr) + kr\mathrm{K}_1(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \mathrm{I}_0(kr) & \mathrm{K}_1(kr) & -kr\mathrm{K}_0(kr) \end{vmatrix}, \tag{B5}
$$

$$
\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_1(kr) & kr\mathrm{I}_0(kr) - \mathrm{I}_1(kr) & -kr\mathrm{K}_0(kr) - \mathrm{K}_1(kr) \\ \mathrm{I}_0(kr) & \mathrm{I}_0(kr) + kr\mathrm{I}_1(kr) & -\mathrm{K}_0(kr) + kr\mathrm{K}_1(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \mathrm{I}_1(kr) & \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) kr\mathrm{I}_0(kr) & -kr\mathrm{K}_0(kr) \end{vmatrix}, \tag{B6}
$$

$$
\Delta_4 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_1(kr) & kr\mathrm{I}_0(kr) - \mathrm{I}_1(kr) & \mathrm{K}_1(kr) \\ \mathrm{I}_0(kr) & \mathrm{I}_0(kr) + kr\mathrm{I}_1(kr) & -\mathrm{K}_0(kr) \\ \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) \mathrm{I}_1(kr) & \left(\frac{\mu}{\mu'}\right) kr\mathrm{I}_0(kr) & \mathrm{K}_0(kr) \end{vmatrix}. \tag{B7}
$$

